Ushtrimi nr. 1

Vërtetoni që prodhimi i katrorit të një nr natyror dhe i numrit natyror një më të vogël se numri i parë, plotëpjesëtohet me 12.

Vërtetim

Le të jetë $n \in \mathbb{N}$. Duhet treguar që $n^2 \cdot (n^2-1) \vdots 12$.

$n^2 \cdot (n^2-1) = n^2 \cdot (n-1)(n+1) = n \cdot n \cdot (n-1)(n+1) = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}_{\text{3 nr natyrorë të njëpasnjëshëm}} \Rightarrow$

$(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \vdots 3$

Tani, dallojmë dy raste:

1) n çift $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2(n^2-1) = (2k)^2 \cdot [(2k)^2-1] = 4k^2(2k-1)(2k+1) \vdots 4$

Meqë $n^2(n^2-1) \vdots 4$, $n^2(n^2-1) \vdots 3$ dhe 4 me 3 nuk kanë faktor të përbashkët $\Rightarrow n^2(n^2-1) \vdots (4 \cdot 3)$ pra $n^2(n^2-1) \vdots 12$

2) n tek $\Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2(n^2-1) = n^2(n-1)(n+1) = (2k+1)^2 (2k) \cdot (2k+2)$
$= 4 \cdot k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)^2 \vdots 4$

Meqë $n^2(n^2-1) \vdots 4$, $n^2(n^2-1) \vdots 3$ dhe 4 me 3 nuk kanë faktor të përbashkët $\Rightarrow n^2(n^2-1) \vdots 12$

Ushtrimi nr. 2

Vërtetoni që shuma e kubeve të tre nr. të njëpasnjëshëm natyrorë, plotëpjesëtohet me 9.

Vërtetim

Marrim $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (që nr. e njëpasnjëshëm $n-1, n, n+1$ të jenë natyrorë)

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - \cancel{3n^2} + 3n - \cancel{1} + n^3 + n^3 + \cancel{3n^2} + 3n + \cancel{1}$$

$$= 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2)$$

Dallojmë rastet e mëposhtme:

1) $n = 3k \Rightarrow 3n(n^2+2) = 3\cdot(3k)\left[(3k)^2+2\right] = 9k\,(9k^2+2) \,\vdots\, 9$

2) $n = 3k+1 \Rightarrow 3n(n^2+2) = 3\cdot(3k+1)\cdot\left[(3k+1)^2+2\right] = 3(3k+1)\cdot(9k^2+6k+3)$
$= 9\cdot(3k+1)\cdot(3k^2+2k+1) \,\vdots\, 9$

3) $n = 3k+2 \Rightarrow 3n(n^2+2) = 3\cdot(3k+2)\cdot\left[(3k+2)^2+2\right] = 3\cdot(3k+2)\cdot(9k^2+12k+6)$
$= 9(3k+2)\cdot(3k^2+4k+2) \,\vdots\, 9$

Ushtrimi nr.3

Vërtetoni që:

a) Çdo nr. natyror që nuk plotëpjesëtohet me nr 2 dhe 3, mund të paraqitet si $6n+1$ ose $6n+5$, për $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Prodhimi i nr. të formës $6k+1$ dhe $6\cdot 5+5$. është i formës $6x+5$.

Vërtetim

a) Marrim $n \in \mathbb{N}$.

Meqë $\cancel{n \,\vdots\, 2}$ dhe $n \not\vdots\, 3 \Rightarrow n$ do kete trajten:

ose $n = 6k+1$ ose $n = 6k+5$

Shenim :
$n = 6k \,\vdots\, 2$ dhe $\vdots\, 3$
$n = 6k+2 = 2(3k+1) \,\vdots\, 2$
$n = 6k+3 = 3(2k+1) \,\vdots\, 3$
$n = 6k+4 = 2(3k+2) \,\vdots\, 2$

b) $(6k+1)\cdot(6s+5) = 6k\cdot 6s + 6k\cdot 5 + 1\cdot 6s + 1\cdot 5 =$

$= 6\underbrace{(6k\cdot s + 5k + s)}_{= n\in \mathbb{N}_0} + 5 = 6\cdot n + 5$

Ushtrimi nr. 4

Vërtetoni që katrori i një nr. natyror ose plotëpjesëtohet me 4 ose gjatë pjesëtimit me 4 jep mbetjen 1.

Zgjidhje

Marrim $n\in \mathbb{N}$. Dallojmë dy raste:

1] $n = 2k \Rightarrow \quad n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \vdots 4$

2] $n = 2k+1 \Rightarrow \quad n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4\underbrace{(k^2+k)}_{\in \mathbb{N}_0} + 1$

Ushtrimi nr. 5

Vërtetoni që katrori i një nr. natyror ose plotëpjesëtohet me 3 ose gjatë pjesëtimit me 3 jep mbetjen 1.

Vërtetim

Marrim $n\in \mathbb{N}$. Dallojmë rastet:

1) $n = 3k \Rightarrow \quad n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2) \vdots 3$

2) $n = 3k+1 \Rightarrow \quad n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

3) $n = 3k+2 \Rightarrow \quad n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

Rrjedhim

Ekuacioni $x^2 = 3y + 2$ nuk ka zgjidhje në bashkësinë e nr. natyrorë.

Ushtrimi nr. 6

Vërtetoni që nqs nr. natyror nuk plotëpjesëtohet me 5 atëherë katrori i tij i zvogëluar ose i zmadhuar me 1 plotëpjesëtohet me 5.

Vërtetim

Marrim $n \in \mathbb{N}$, të tillë që $n \vdots 5 \Rightarrow$

$$n = \begin{cases} 5k+1 \Rightarrow n^2 = (5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2 - 1 = 5(5k^2+2k) \vdots 5 \\ 5k+2 \Rightarrow n^2 = (5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + \overset{5-1}{4} = 5(5k^2+4k+1)-1 \Rightarrow n^2+1 = 5(5k^2+4k+1) \vdots 5 \\ 5k+3 \Rightarrow n^2 = (5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + \overset{10-1}{9} = 5(5k^2+6k+2)-1 \Rightarrow n^2+1 = 5(5k^2+6k+2) \vdots 5 \\ 5k+4 \Rightarrow n^2 = (5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + \overset{15+1}{16} = 5(5k^2+8k+3)+1 \Rightarrow n^2-1 = 5(5k^2+8k+3) \vdots 5 \end{cases}$$

Ushtrimi nr. 7

Vërtetoni që nqs nr. natyror nuk plotëpjesëtohet me 7, atëherë kubi i tij i zmadhuar ose zvogëluar me 1, plotëpjesëtohet me 7

Vërtetim

$$n = \begin{cases} 7k+1 \Rightarrow n^3 = (7k+1)^3 = (7k)^3 + 3\cdot(7k)^2\cdot 1 + 3\cdot(7k)\cdot 1^2 + 1 = 7(49k^3 + 21k^2 + 3k) + 1 \Rightarrow \\ \quad n^3 - 1 = 7(49k^3 + 21k^2 + 3k) \vdots 7 \\ 7k+2 \Rightarrow n^3 = (7k+2)^3 = (7k)^3 + 3\cdot(7k)^2\cdot 2 + 3(7k)\cdot 2^2 + \overset{7+1}{2^3} = 7(49k^3 + 42k^2 + 12k + 1) + 1 = \\ \quad n^3 - 1 = 7(49k^3 + 42k^2 + 12k + 1) \vdots 7 \\ 7k+3 \Rightarrow n^3 = (7k+3)^3 = (7k)^3 + 3\cdot(7k)^2\cdot 3 + 3(7k)\cdot 3^2 + \overset{28-1}{3^3} = 7(49k^3 + 63k^2 + 27k + 4) - 1 \Rightarrow \\ \quad n^3 + 1 = 7(49k^3 + 63k^2 + 27k + 4) \vdots 7 \\ 7k+4 \Rightarrow n^3 = (7k+4)^3 = (7k)^3 + 3(7k)^2\cdot 4 + 3\cdot(7k)\cdot 4^2 + \overset{63+1}{4^3} = 7(49k^3 + 84k^2 + 48k + 9) + 1 \Rightarrow \\ \quad n^3 - 1 = 7(49k^3 + 84k^2 + 48k + 9) \vdots 7 \\ 7k+5 \Rightarrow n^3 = (7k+5)^3 = (7k)^3 + 3(7k)^2\cdot 5 + 3(7k)\cdot 5^2 + \overset{126-1}{5^3} = 7(49k^3 + 105k^2 + 75k + 18) - 1 \Rightarrow \\ \quad n^3 + 1 = 7(49k^3 + 105k^2 + 75k + 18) \vdots 7 \\ 7k+6 \Rightarrow n^3 = (7k+6)^3 = (7k)^3 + 3(7k)^2\cdot 6 + 3(7k)\cdot 6^2 + \overset{217-1}{6^3} = 7(49k^3 + 126k^2 + 108k + 31) - 1 \Rightarrow \\ \quad n^3 + 1 = 7(49k^3 + 126k^2 + 108k + 31) \vdots 7 \end{cases}$$

Ushtrimi nr. 8

Vërtetoni që $\forall n \in \mathbb{N}$, të paktën njëri nga nr. n^3, n^3+1, n^3-1 plotpjesëtohet me 9.

Vërtetim

Dallojmë rastet:

$$n = \begin{cases} 3k \Rightarrow n^3 = (3k)^3 = 27k^3 = 9(3k^3) \vdots 9 \\ 3k+1 \Rightarrow n^3 = (3k+1)^3 = (3k)^3 + 3(3k)^2 + 3\cdot(3k) + 1 = 9(3k^3+3k^2+k)+1 \Rightarrow \\ \quad n^3 - 1 \vdots 9 \\ 3k+2 \Rightarrow n^3 = (3k+2)^3 = (3k)^3 + 3(3k)^2\cdot 2 + 3(3k)\cdot 2^2 + \overset{9-1}{2^3} = 9(3k^3+6k^2+4k+1) - 1 \\ \quad \Rightarrow n^3+1 \vdots 9 \end{cases}$$

Ushtrimi nr. 9

Vërtetoni që $\forall n \in \mathbb{N}$, nr. $(n^2-1)\cdot n^2 \cdot (n^2+1)$ plotpjesëtohet me 60

Vërtetim

Meqë n^2-1, n^2, n^2+1 janë 3 nr. të njëpasnjëshëm $\Rightarrow$

$$\boxed{(n^2-1)\cdot n^2 \cdot (n^2+1) \vdots 3} \quad *$$

Dallojmë dy raste:

$(n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \vdots 4)$

1) n çift $\Rightarrow n^2 \vdots 4 \Rightarrow (n^2-1)n^2(n^2+1) \vdots 4$

2) n tek $\Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2+1 = 4k^2+4k+2 = 2(2k^2+2k+$

dhe $n^2-1 = 4k^2+4k = 4(k^2+k) \Rightarrow (n^2-1) \vdots 4 \Rightarrow$.

$(n^2-1) n^2 (n^2+1) \vdots 4$

$\Rightarrow (n^2-1)\cdot n^2 \cdot (n^2+1) \vdots (3\cdot 4)$ pra $\boxed{(n^2-1)\cdot n^2 \cdot (n^2+1) \vdots 12}$ $**$

Mbetet të vërtetojmë që $(n^2-1)\cdot n^2 \cdot (n^2+1) \vdots 5$, që del nga Ushtrimi nr. 6 $\Rightarrow$ $\boxed{(n^2-1)\cdot n^2 \cdot (n^2+1) \vdots 60}$ $***$

Ushtrimi nr. 10

Vërtetoni që $\forall n \in \mathbb{N}$, nr. $(n^3-1)\cdot n^3\cdot(n^3+1) \vdots 504$.

Vërtetim

Nga ushtrimi nr. 8 kemi që $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(n^3-1)\cdot n^3\cdot(n^3+1) \vdots 9}$ *

Dallojmë dy raste:

1) n tek $\Rightarrow$ n^3-1, n^3+1 janë dy nr. çift të njëpasnjëshëm $\Rightarrow$
$(n^3-1)\cdot(n^3+1) \vdots 2\cdot 4$ pra $(n^3-1)\cdot(n^3+1) \vdots 8 \Rightarrow (n^3-1)\cdot n^3\cdot(n^3+1) \vdots 8$

2) n çift $(n=2k)$ $\Rightarrow$ $n^3=(2k)^3=8k^3 \Rightarrow n^3 \vdots 8 \Rightarrow (n^3-1)\cdot n^3\cdot(n^3+1) \vdots 8$

$\Rightarrow \boxed{(n^3-1)\cdot n^3\cdot(n^3+1) \vdots 8}$ **

$\boxed{504 = 9\cdot 8\cdot 7}$

Nga ushtrimi nr. 7, $\boxed{(n^3-1)\cdot n^3\cdot(n^3+1) \vdots 7}$ ***

$\Rightarrow (n^3-1)\cdot n^3\cdot(n^3+1) \vdots (7\cdot 8\cdot 9)$ pra $(n^3-1)n^3(n^3+1) \vdots 504$.